INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

IX. OSZTÁLY

1. Az A és B járművek egyszerre indulnak az M pontból ugyanazon az útvonalon, ugyanabba az irányba, a v_1 illetve v_2 ($v_1 < v_2$), állandó sebességgel, leírva a d egyenes útvonalat. Legyen P egy olyan pont, amely nem tartozik a d egyeneshez, amelyre $PM = a$ és $m(\sphericalangle PMA) > 90°$. Az indulástól számítva mennyi idő múlva lesz maximális az az $APB\sphericalangle$, amely alatt a P pontból látszanak a járművek?

2. Számítsd ki az $S=\left[\frac{1^2}{2}\right]+2^1\cdot\left[\frac{2^2}{3}\right]+2^2\cdot\left[\frac{3^2}{4}\right]+\ldots+2^{2013}\cdot\left[\frac{2014^2}{2015}\right]$ összeget, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli.

3. Határozd meg az $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ függvényt, amelyre $1^2f(1)+2^2f(2)+\ldots+n^2f(n)=\frac{n^2\left(f(n)+1\right)^2}{4}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Gazeta Matematică 11/2013

4. Az ABC háromszögben $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ úgy, hogy $\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{1}{n}$, $n > 2$, $AA_1 \cap BB_1 = \{B'\}$, $BB_1 \cap CC_1 = \{C'\}$, $CC_1 \cap AA_1 = \{A'\}$. Határozd meg a $\frac{T_{A'B'C'_\Delta}}{T_{ABC_\Delta}}$ arány értékét!

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

X. OSZTÁLY

1. Adottak az a, b, c és d komplex számok úgy, hogy $a + b = c + d$ és $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Igazold, hogy $a^n + b^n = c^n + d^n$, bármely n természetes szám esetén.

2. Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre teljesül az $[\log_2 x] + [\log_4 x] = 3$ tulajdonság, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli.

Gazeta Matematică 1/2014

3. Tekintsük az a, b, c pozitív számokat és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c.$ függvényt. Legyenek u, v, w olyan valós számok, amelyekre $0 \le u < v < w$ és adottak az $U(u, f(u)), V(v, f(v))$ és $W(w, f(w))$ pontok. Igazold, hogy $UW^2 > UV^2 + VW^2$.

4. Egy egységnyi kerületű téglalap felcsavarásával egy henger palástját kapjuk. Határozd meg ennek a hengernek a lehető legnagyobb térfogatát és add meg a téglalap méreteit ebben az esetben!
Megjegyzés: Az R sugarú, H magasságú egyenes körhenger térfogatképlete $V = \pi R^2 H$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

XI. OSZTÁLY

1. Határozd meg az $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ függvény grafikonjának aszimptotáit!

2. Legyen A egy harmadrendű négyzetes mátrix, melynek elemei egész számok. Igazold, hogy a $3A + 5I_3$ mátrix invertálható!

Supliment Gazeta Matematică 9/2013

3. Felhasználva a függvény határértékének a fogalmát egy adott pontban, igazold, hogy az $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ függvény nem racionális!

Megjegyzés: Egy függvény racionális, ha felírható két polinomfüggvény hányadosaként.

Supliment Gazeta Matematică 1/2014

4. Egy jégkorongcsapat játékosjerete 15 játékosból áll. Közülük 6 kezdő, a többi 9 cserejátékos. Az edző a mérkőzés során bármikor lecserélheti akármelyik játékost és cserét akárhányszor eszközölhet. Valamely lecserélt játékos egy idő után visszatérhet a játéktérre. Az effektív játékidő 60 perc. Egy mérkőzés végén megállapították, hogy a 15 játékosból mindegyik ***n*** percet játszott.

a) Határozd meg az ***n*** értékét!

b) Írd le egy olyan négyzetes mátrix segítségével, amelynek elemei a 0 és 1 számok, hogyan küldte a jégre az edző a játékosokat a feladat feltételeinek megfelelően.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

XII. OSZTÁLY

1. Adottak az f, g, G : [1, ∞) $\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(3+\ln x)(5+\ln x)}$, $g(x)=\frac{1}{x(a+\ln x)}$, $G(x)=\ln(a+\ln x)$ függvények, ahol $a>0$.

a) Igazold, hogy G a g-nek egy primitív függvénye az $[1,+\infty)$ intervallumon!

b) Határozd meg az f függvénynek egy olyan F primitív függvényét az $[1,\infty)$ intervallumon, amelyre teljesül $F(e^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{7}$.

Supliment Gazeta Matematică 12/2013

2. A $\mathbb{Z}$ halmazon értelmezzük a "$\circ$" műveletet úgy, hogy $x\circ y=5xy+5(x+y)+4,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$.

a) Tanulmányozd a "$\circ$" művelet asszociativítását!

b) Határozd meg az utolsó 100 számjegyét annak a, tízes számrendszerben felírt egész számnak, amelyet az $1\circ2\circ3\circ4\circ\ldots\circ2013\circ2014$ eredményez!

3. Tekintsük a $(\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$ csoportot. Bármely $\hat{a}\in\mathbb{Z}_p^*$ elem esetén értelmezzük a $\psi:\mathbb{Z}_p^*\to\mathbb{Z}_p^*, \Psi(\hat{x})=\hat{a}\cdot\hat{x}, \forall\hat{x}\in\mathbb{Z}_p^*$ függvényt, ahol p prímszám.

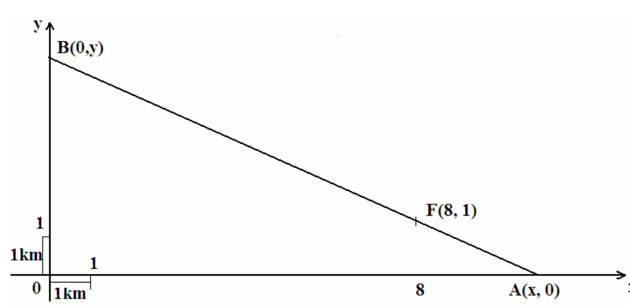
a) Igazold, hogy ψ bijektív.

b) Igazold az $\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\ldots\cdot\widehat{p-1}=\Psi(\hat{1})\cdot\Psi(\hat{2})\cdot\ldots\cdot\Psi(\widehat{p-1})$ egyenlőséget!

c) Bizonyítsd be az $\hat{a}^{p-1}=\hat{1}$ egyenlőséget!

d) Bizonyítsd be, hogy $2017\,|\left(\sum_{i=1}^{2016}C_{2017}^{i}\right)$.

4. Az F(8, 1) gyár az egymásra merőleges Ox és Oy utak között helyezkedik el, mint a mellékelt ábrán. Olyan egyenesvonalú utat építenek, amely összeköti a gyárat és a két utat úgy, hogy az építkezési költség minimális legyen, vagyis az FA + FB = AB hosszúság minimális legyen. Határozd meg a minimális költséggel megépített AB út hosszát!



Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*